

COMPARISON OF EXPERIMENTAL DATA AND SEMIEMPIRICAL CALCULATIONS
FOR AN INCOMPRESSIBLE TURBULENT BOUNDARY LAYER
WITH A PRESSURE GRADIENT

GPO PRICE \$ _____

CFSTI PRICE(S) \$ _____

A. V. Kolesnikov

Hard copy (HC) 3.00Microfiche (MF) .65

653 July 65

Translation of "Sopostavleniye dannyykh eksperimenta i poluempiricheskogo
rascheta dlya nezhimayemogo turbulentnogo pogranichnogo
sloya s gradiyentom davleniya"
Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal,
Vol. 10, No. 4, pp. 465-471, 1966

FACILITY FORM 302
N67 15552
(ACCESSION NUMBER)

(PAGES)

(NASA CR OR TMX OR AD NUMBER)

(THRU)

(CODE)
12

(CATEGORY)

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION
WASHINGTON
DECEMBER 1966

COMPARISON OF EXPERIMENTAL DATA AND SEMIEMPIRICAL CALCULATIONS
FOR AN INCOMPRESSIBLE TURBULENT BOUNDARY LAYER
WITH A PRESSURE GRADIENT

A. V. Kolesnikov

ABSTRACT

A comparison is presented of velocity profiles for an incompressible turbulent boundary layer obtained by semiempirical calculations with those obtained by applying universal empirical laws. The existence of a similarity between the velocity distributions in the internal portion of a boundary layer with various Reynolds numbers and the pressure gradients in the external flow is confirmed by the results of semiempirical calculations. It is shown that if a satisfactory approximation is adopted for the shear stress and mixing length, the predicted velocity distributions in the external portion of the layer at a constant pressure practically coincide with the "velocity defect law." The drag law determined for this case, using the semiempirical method, is confirmed by the experimental relation of Folkner, even though rough approximations are used for the shear stress and the mixing length.

Tremendous advances have recently been made in the field of purely /465* empirical methods for calculating a turbulent boundary layer. Statistical analysis of experimental data has been used as a basis for generalization of velocity profiles in the boundary layer of equilibrium flows (ref. 3) and universal forms have been derived for velocity profiles in the inner and outer regions of the layer. There have been numerous attempts (refs. 4-7) to use these ideas for formulating a method of calculating the integral characteristics of the boundary layer.

It is interesting in this regard to examine the degree of agreement between these universal empirical relationships and results based on semiempirical theories of the boundary layer.

*Numbers given in margin indicate pagination in original foreign text.

A double-layer model is used in semiempirical methods for calculating the boundary layer.

It is assumed that a laminar sublayer in which viscous friction is predominant is formed in direct proximity to the wall where turbulent pulsations are attenuated. The velocity profile in the laminar sublayer is determined (ref. 1) by the Polhausen method, and the thickness of the layer is found in conformity with dimensional analysis $\eta = \delta / \delta = \alpha / R_1$. The coefficient α is assumed to be a universal constant equal to approximately 11.5.

The relationship between the tangential stress τ and the transverse velocity gradient in the turbulent region of the layer is determined by Prandtl's

formula for the "mixing path" $\tau = \rho l^2 (\partial u / \partial y)^2$. If τ and l are known functions of y , the velocity profile in the turbulent region of the layer may be found from this formula. The constant of integration may be found from the condition of continuity for the velocity profile at the boundary of the laminar sublayer or at the outside boundary of the layer. In the first case the velocity profile is expressed in a form reminiscent of the law for the wall, /466

$$\frac{u}{u_*} = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \frac{A}{R_1} + \int_{\eta_n}^{\eta} \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} d\eta, \quad (1)$$

and in the second case by an expression resembling the law of velocity defect

$$\frac{u - u_\delta}{u_*} = \int_{\eta}^{\eta_n} \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} d\eta. \quad (2)$$

If the constant of integration is determined on the basis of one of these conditions, fulfillment of the second condition is possible only when there is a definite relationship between the tangential stress at the wall and the thickness of the boundary layer, called the law of opposition:

$$\frac{u_\delta}{u_*} = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \frac{A}{R_1} + \int_{\alpha/R_1}^1 \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} d\eta.$$

The integrands in the preceding formulas must be given to determine the specific form of the velocity profiles and law of opposition.

Prandtl used Nikuradze's experiments as a basis for deriving an empirical relationship between the length of the "mixing path" and the dimensionless transverse coordinate $l/\delta = 0.14 - 0.08(1-\eta)^2 - 0.06(1-\eta)^4$, which is replaced in most works for computational simplicity by the simpler formula $l/\delta = 0.4\eta$.

On the basis of K. K. Fedyaevskiy's hypothesis (ref. 1) τ/τ_0 or $\sqrt{\tau/\tau_0}$

is replaced by polynomials in which the coefficients, which are functions of the parameter A, are determined from boundary conditions on the wall or on the outer boundary of the layer.

Depending on the number of conditions used, polynomials of various degrees may be derived which approximate the actual distribution of tangential stress with varying accuracy.

Alternate stricter methods for finding the tangential stress have recently been proposed, which may be used when necessary for improving the accuracy of calculations. However, as will be shown below, the characteristic singularities of velocity profiles in the boundary layer are detected by semiempirical methods even with a rather rough approximation of tangential stress.

This is most easily illustrated by the boundary layer of a plate at constant pressure. A comparison is made in figure 1, A between experimental velocity profiles close to a wall (taken from ref. 4) and the results of calculations by formula (1), using various approximating relationships for determining the length of the "mixing path" and the profile of tangential stress. Curves are given in this same graph for a boundary layer with positive pressure gradient ($A = 20$). It may be seen that inaccuracy in the approximating formulas for the tangential stress and length of the "mixing path" has no noticeable effect on distribution of velocity in the inner region of the boundary layer. The results of calculations in all cases are extremely close to a logarithmic velocity profile. A positive pressure gradient in the external flow has practically no effect on the velocity profile in the inner region of the layer.

Thus the given comparison shows that the results of semiempirical methods agree satisfactorily with the empirical law for the wall.

Experimental data for the boundary layer of a plate (ref. 3) are compared with the results of calculations by formula (2) in figure 1, B, using various relationships for τ and l . These materials show that accuracy in approximating the velocity in the outer region of the boundary layer is considerably dependent on proper selection of the functions which define the tangential stress profile and the length of the "mixing path." The better these functions reflect the actual distribution of τ and l , the greater will be the accuracy with which the results of the calculation approach the actual velocity profile. Moreover, the best agreement between theoretical and experimental characteristics is observed when a polynomial is used for τ/τ_0 together with the first

of the formulas for l/δ , while the greatest divergence is observed when a polynomial in the second degree is used for $\sqrt{\tau/\tau_0}$ together with the simplified formula for l/δ .

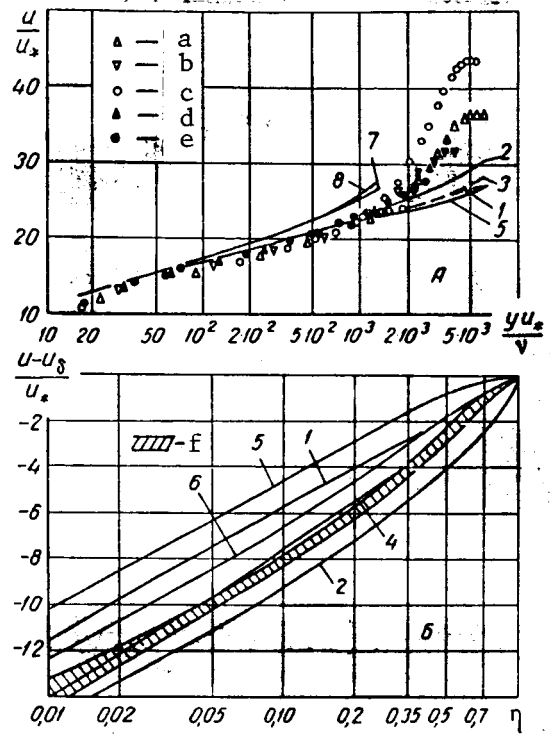


Figure 1. Comparison of theoretical (A, by formula (1); B, by formula (2)) and experimental (A, from data in ref. 3, B, ref. 4) velocity profiles in boundary layer of plate: 1, 3, 5, 7 and $l = 0.4 y$; 2, 4, 6, 8 - $l/\delta =$

$$\begin{aligned}
 &0.14 - 0.08 (1-\eta)^2 - 0.06 (1-\eta)^4; \quad 1, 2 \text{ and } \tau/\tau_0 = 1; \quad 3, \\
 &4 - \tau/\tau_0 = 1 - \eta^2; \quad 5, 6 - \sqrt{\tau/\tau_0} = 1 - \eta^2; \quad 7 - \sqrt{\tau/\tau_0} = 1 + \\
 &0.5 A \eta - (1 + 0.5 A) \eta^2, \quad A = 20; \quad 8 - \tau/\tau_0 = 1 + A \eta - \\
 &(1 + A) \eta^2, \quad A = 20; \quad a - A/R_1 = 2.84 \cdot 10^{-3}; \quad b - 2.59 \cdot 10^{-3}; \\
 &5.15 \cdot 10^{-3}; \quad g - A/R_1 = -0.2 \cdot 10^{-3}; \quad \partial - A = 0;
 \end{aligned}$$

The values of l/δ found by the simplified formula are considerably greater than the actual values in the outer region of the boundary layer. The result is an increase in the fullness of the theoretical velocity profiles in comparison with the actual profiles and a reduction in the parameter $H = \delta^*/\delta^{**}$. Analysis of the curves given in figure 1, B yields the formula $H = (1 - \beta \sqrt{c_f}/2)^{-1}$,

which gives the coefficient H in terms of the local coefficient of friction c_f .

The coefficient β in this formula may vary from 4.7 (curve 5) to 6.8 (curve 4), depending on the completeness of the velocity profile. The latter value of the coefficient practically coincides with the empirical value given by Hamma (ref. 10).

It is clear from this that the reason for inaccuracy in the parameters H for some semiempirical methods is the use of the simplified formula for determining the length of the "mixing path". If the more exact formulas are used for τ/τ_0 and l/δ , values may be derived for H which are extremely close to the experimental values of this parameter.

The accuracy in approximating τ/τ_0 and l/δ affects the law of opposition to a lesser degree. For instance, if the simplified formula is used for determining l/δ and $\sqrt{\tau/\tau_0}$ is given by a polynomial in the second degree (ref. 2)

(the corresponding velocity profile is shown in figure 1, curve 5), the law /468 of opposition for a plate may be given in the form of the following power function over a wide range of Reynolds numbers ($R^{**} = 10^3 - 10^7$):

$$c_{f0}/2 = 0.00652 R^{*-0.16}, \quad (3)$$

which practically coincides with the analogous Folkner formula found by analysis of a large number of experimental materials.

We shall now consider profiles for boundary layers with a longitudinal pressure gradient.

After analyzing a large number of measurements on straight wings, Doenhoff and Tetervin (ref. 7) and subsequently Schubauer and Klebanoff (ref. 8) derived a single-parameter family of universal velocity profiles $\bar{u} = \bar{u}(H, y/\delta^{**})$ for boundary layers with a longitudinal pressure gradient.

Theoretical and experimental relationships $\bar{u} = \bar{u}(H)$ are compared in figure 2 with y/δ^{**} held constant. It was assumed in calculating the velocities that τ/τ_0 is given (ref. 2) by a polynomial in the second degree (two conditions are used at the wall and one on the outer boundary of the layer), and that the length of the "mixing path" is given by the simplified formula $l = 0.4y$.

The results of the calculations agree satisfactorily with experimental data throughout the entire range of the parameters H up to predetached states of the boundary layer ($H = 1.74 - 1.8$). A comparison of the theoretical curves shows that a change in the Reynolds number has little effect on relationships of this

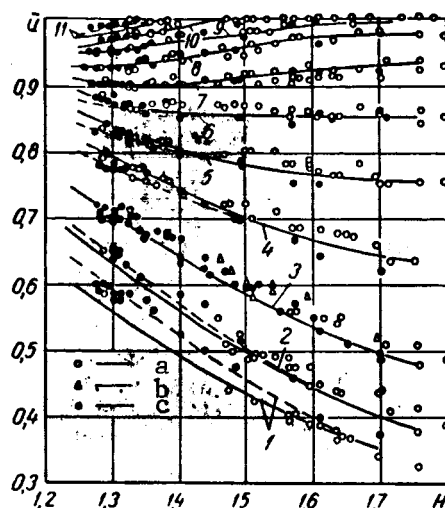


Figure 2. Comparison of theoretical and experimental velocity profiles in boundary layer with pressure gradient: a, results of Doenhoff and Tetervin at $Re = (0.9-4.18) \cdot 10^6$; b, results of Brebner; c, results of Schubauer and Klebanoff at $Re = 27.7 \cdot 10^6$; solid lines indicate calculations at $lgR^{**} = 3.4$; broken lines indicate calculations at $lgR^{**} = 6.2$; 1, at $y/\delta^{**} = \frac{1}{4}$; 2- $\frac{1}{2}$; 3-1; 4-2; 5-3; 6-4; 7-5; 8-6; 9-7; 10-8; 11-9.

type. There is only some slight systematic divergence of experimental results at different Reynolds numbers close to the wall which shows up quite satisfactorily in the calculations. However, it should be borne in mind that the theoretical values of the parameter H in the given case differ somewhat from its actual values. Therefore the theoretical and experimental velocity profiles correspond at the same values of H to different values of the form parameter A . As has been pointed out, this discrepancy may be reduced by using more accurate approximations for the tangential stress profile and the length of the "mixing path".

In conclusion let us examine one of the possible methods for simplifying semiempirical calculation of the characteristics of a boundary layer when there is a longitudinal pressure gradient. We shall introduce the form parameter $f = (2\delta^{**}/C_f)(u_\delta/u_\delta)$, where δ^{**} is the thickness with respect to impulse

loss; c_{f0} is the coefficient of local friction in the nongradient flow which /469

corresponds to the actual thickness δ^{**} . By expressing the thickness with respect to impulse loss in terms of the form parameter f using the formula given above, we may transform the integral impulse relationship for an axisymmetric

boundary layer where the thickness of the layer is small compared with the radius r_0 of transverse curvature of a body to the following form:

$$\frac{df}{dx} = \frac{u'_b}{u_b} F(f, R^{**}) + \left[\frac{u''_b}{u_b} - (m+1) \frac{r'_0}{r_0} \right] f, \quad \begin{cases} F(f, R^{**}) = (m+1)c_f/c_{f0} - \\ - [2 + (m+1)(1+H)]f, \\ m = -d \lg(c_f/2)/d \lg R^{**}. \end{cases} \quad (4)$$

The function $F(f, R^{**})$ was calculated on the basis of K. K. Fedayevskiy's method (ref. 2). It was assumed that the tangential stress velocity was given by a polynomial of the second degree for $\sqrt{\tau}/\tau_0$, and that the length of the

"mixing path" was determined by the simplified formula $l = 0.4y$. The results of the calculation are given in figure 3. The graphs for the function $F(f, R^{**})$ plotted for various values of R^{**} do not deviate from the straight line $F = 1.17-4.4f$ by more than 2-3 percent throughout the entire range of variations in the form parameter f . Only close to points $f = f_s$ corresponding to $c_f = 0$ is

a somewhat greater divergence (reaching 5 percent observed between the function F and the linear relationship. It should be noted that the coefficients in the last equation are close to the corresponding coefficients in L. G. Loytsyanskiy's method (ref. 10). Substituting the linear approximation for the function F in equation (4) and integrating, we obtain the following solution for the integral impulse relationship by using formula (3)

$$R^{**} = \frac{0.0132}{\frac{-1.88}{r_0} \frac{-2.07}{u_b}} \left[153 \frac{u_{bt}^{-2.4}}{r_{0t}^{-2.18}} R_t^{**1.16} + 1.17 \operatorname{Re} \int_{\frac{x_t}{x}}^{\frac{x}{x_t}} \frac{u_b^{-3.4}}{r_0^{-2.18}} d\bar{x} \right]^{0.863}, \quad (5)$$

where the subscript t indicates values of the characteristics at the point x_t

from which calculation of the turbulent boundary layer begins (e. g., at the transition point). Setting $r_0 = 1$ in (5), we obtain a formula for calculating the characteristics of a plane boundary layer.

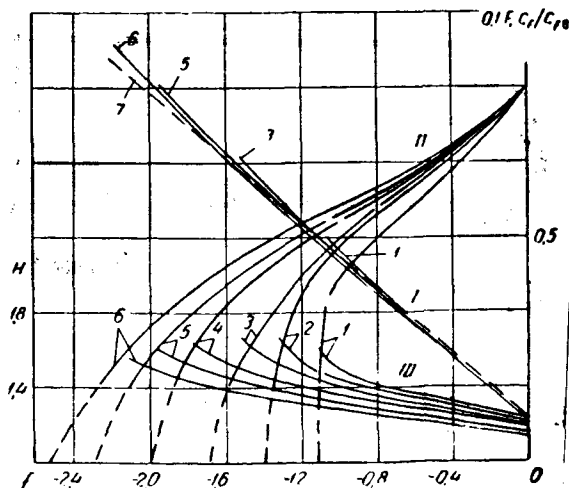


Figure 3. Local characteristics of boundary layer (I-F; II- c_f/c_{f0} ; III-H) as functions of form parameter f calculated on basis of K. K. Fedayevskiy's method: 1-at $\lg R^{**} = 3.4$; 2-3.8; 3-4.2; 4-4.6; 5-5.4; 6-6.2; 7-at $F = 1.17-4.4f$.

Comparison based on a large variety of problems has shown (figure 4) that solution (5) agrees satisfactorily with experimental data and is extremely close to results based on the initial computational method (ref. 2).

Thus the materials given here show that conclusions drawn from semiempirical methods for calculating a turbulent boundary layer agree satisfactorily with the latest empirical relationships for velocity profiles, and that the methods themselves may be considerably simplified from the computational standpoint and made as effective as the simplest empirical methods of calculation. In addition, semiempirical methods have considerably greater flexibility. They have been generalized to the case of gas flow at high velocities (ref. 11) in the presence of heat exchange, and may be used in accounting for the effect of transverse curvature of a body (ref. 12), the presence of chemical reactions, etc. Therefore further development and improvement of these methods is of considerable interest.

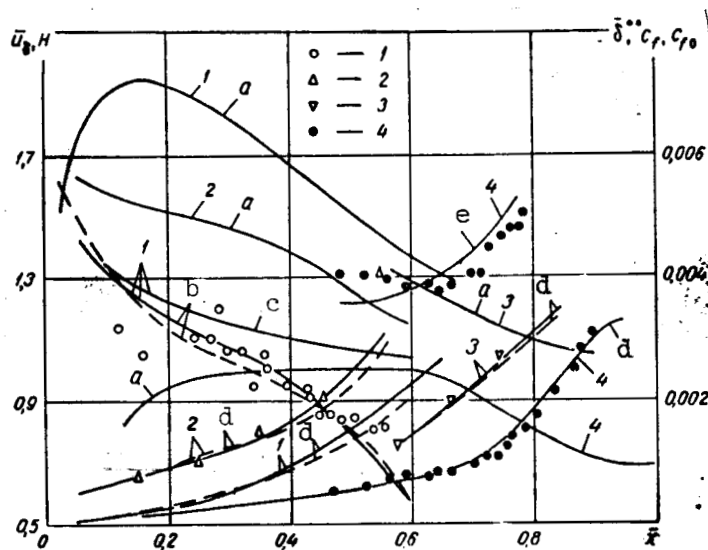


Figure 4. Comparison between results of calculating characteristics of plane boundary layer and experimental data of various authors (a- u_δ ; b- c_f ; c- c_{f0} ; d- δ^{**} ;

e-H): 1, Fomina and Buchinskaya ($Re = 5.17 \cdot 10^6$); 2, Doenhoff and Tetervin ($Re = 2.64 \cdot 10^6$); 3, Grushvits ($Re = 0.85 \cdot 10^6$); 4, Schubauer and Klebanoff ($Re = 27.7 \cdot 10^6$); broken lines indicate calculations according to ref. 2, solid lines indicate calculations according to formula (5).

NOTATION

Values x and y are the coordinate axes along the surface and perpendicular to the surface; u is the velocity projection on the x -axis; r_0 is the radius of transverse curvature of the body; $u_\delta = u_\delta/V$; $x = x/V$; $r_0 = r_0/b$; $Re = Vb/\nu$; V and b are the characteristic velocity and linear dimension; ν is the kinematic coefficient of viscosity; $u_w = \sqrt{\tau_0/\rho}$ is the "dynamic" velocity; τ_0 is the tangential stress at the wall; $c_f = 2\tau_0/\rho u_\delta^2$ is the local coefficient of friction; ρ is the atmospheric density; δ is the thickness of the boundary layer; δ^* is the thickness with respect to displacement; δ^{**} is the thickness with respect to impulse loss; $H = \delta^*/\delta^{**}$; $R^{**} = u_\delta \delta^{**}/\nu$; $r_1 = y/\delta$; $R_1 = u_* \delta/\nu$, $A = (\delta/\tau_0) \frac{d\rho}{dx}$; l is the length of the "mixing path."

REFERENCES

1. Fedyaevskiy, K. K. Turbulentnyy pogranichnyy sloy kryla. (Turbulent Boundary Layer of a Wing) 1, Trudy Ts AGI, Issue 282, 1939; Part II, Issue 316, 1937.
2. Fedyaevskiy, K. K. and Ginevskiy, A. S. Zhurnal tekhnicheskoy Fiziki, Vol. 27, No. 2, pp. 309-326, 1957.
3. Klauser, F. Turbulentnyy pogranichnyy sloy. (Turbulent Boundary Layer) IN: Problems in Mechanics (Problemy mekhaniki). Foreign Literature Publishers (I. L.), 1959.
4. Rotta, J. C. Turbulent Boundary Layer in Incompressible Flow. Progress in Aeronautical Science. 2. Pergamon press. Oxford and others, 1962.
5. Lin Chia-Chiao (ed.) Turbulentnyye techeniya i teploperedacha. (Turbulent Flows and Heat Transfer). I. L., 1963.
6. Libby, P. A., Baronti, P. O. and Napolitono, L. Raketnaya tekhnika i kosmonavtika. (Rocket Technology and Astronautics) Vol. 2, No. 3, pp. 41-49, 1964.
7. Doenhoff, A., Tetervin, N. NACA, rep. No. 772, 1943.
8. Schubauer, G. Klebanoff, P. S. NACA, rep. No. 1030, 1951.
9. Monin, A. S. and Yaglom, A. M. Statisticheskaya gidromekhanika. (Statistical Hydromechanics) Nauka, 1965.

10. Loytsyanskiy, L. G. Mekhanika zhidkosti i gaza. (Mechanics of Liquid and Gas) Gostekhizdat, 1954.
11. Kutateladze, S. S. and Leont'yev, A. I. Turbulentnyy pogranichnyy sloy. (Turbulent Boundary Layer) Izd-vo AN SSSR, 1962.
12. Ginevskiy, A. S. and Solodkin, Ye. Ye. Prikladnaya Matematika i Mekhanika, Vol. 22, No. 6, 1958.

УДК 532.517.4

А. В. Колесников

СОПОСТАВЛЕНИЕ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТА И ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ

Приводится сравнение профилей скорости, полученных на основе полуэмпирических методов расчета, с универсальными эмпирическими закономерностями. Предложен способ упрощения полуэмпирического метода расчета.

В последнее время достигнуты большие успехи в области чисто эмпирических методов расчета турбулентного пограничного слоя. На основе статистической обработки экспериментальных данных проведено обобщение профилей скорости в пограничном слое равновесных потоков [3], получены универсальные формы профилей скорости во внутренней и внешней частях слоя. Имеются многочисленные попытки [4—7] использования этих идей для построения метода расчета интегральных характеристик пограничного слоя.

В связи с этим интересно посмотреть, в какой мере результаты, полученные на основе полуэмпирических теорий турбулентного слоя, согласуются с этими универсальными эмпирическими закономерностями.

В полуэмпирических методах расчета принимается двухслойная схема пограничного слоя.

Предполагается, что в непосредственной близости от стенки, где турбулентные пульсации затухают, образуется ламинарный подслой, в котором наибольшее влияние оказывает вязкое трение. Профиль скорости в ламинарном подслое определяется [1] по методу Польгаузена, его толщина находится в соответствии с теорией размерности $\eta_n = \delta_n / \delta = \alpha / R_1$. Коэффициент α считается универсальной константой, равной примерно 11,5.

В турбулентной части слоя связь между касательным напряжением τ и поперечным градиентом скорости определяется формулой Прандтля для "пути смешения" $\tau = \rho l^2 (\partial u / \partial y)^2$. Если известны зависимости τ и l от y , то из этой формулы можно получить профиль скорости в турбулентной части слоя. При этом константа интегрирования может быть найдена из условия непрерывности профиля скорости на границе ламинарного подслоя или на внешней границе слоя. В первом случае профиль скорости выражается в виде, напоминающем закон стенки,

$$\frac{u}{u_*} = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \frac{A}{R_1} + \int_{\eta_n}^{\eta} \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} d\eta, \quad (1)$$

во втором случае — закон дефекта скорости

$$\frac{u - u_\delta}{u_*} = \int_1^\eta \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} d\eta. \quad (2)$$

Если константу интегрирования определить на основании одного из упомянутых выше условий, то выполнение второго условия окажется возможным только при наличии определенной связи между касательным напряжением на стенке и толщиной пограничного слоя, называемой законом сопротивления:

$$\frac{u_\delta}{u_*} = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \frac{A}{R_1} + \int_{\alpha/R_1}^1 \frac{\delta}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} d\eta.$$

Для определения конкретного вида профилей скорости и закона сопротивления необходимо задать подынтегральные функции в предыдущих формулах.

На основании опытов Никурадзе Прандтль получил эмпирическую зависимость длины «пути смещения» от безразмерной поперечной координаты $l/\delta = 0,14 - 0,08(1 - \eta)^2 - 0,06(1 - \eta)^4$, которая в большинстве работ заменяется для упрощения выкладок более простой формулой $l/\delta = 0,4\eta$.

По предложению К. К. Федяевского [1] τ/τ_0 или $\sqrt{\tau/\tau_0}$ заменяется полиномами, в которых коэффициенты, представляющие собой функции параметра A , определяются из граничных условий на стенке и на внешней границе слоя.

В зависимости от количества использованных условий можно получить полиномы различной степени, с разной точностью аппроксимирующие действительное распределение касательного напряжения.

В последнее время предложены другие, более строгие методы нахождения касательного напряжения, которые в случае необходимости могут быть использованы для уточнения расчетов. Однако, как будет показано ниже, характерные особенности профилей скорости в пограничном слое улавливаются полуэмпирическими методами даже при достаточно грубой аппроксимации касательного напряжения.

Это легче всего проследить на примере пограничного слоя пластины при постоянном давлении. На рис. 1, А приведено сравнение экспериментальных профилей скорости вблизи стенки, заимствованных из работы [4], с результатами расчетов по формуле (1) при использовании различных аппроксимирующих зависимостей для определения длины «пути смещения» и профиля касательного напряжения. На тот же график нанесены кривые для пограничного слоя с положительным градиентом давления ($A=20$). Видно, что неточность аппроксимирующих формул для касательного напряжения и длины «пути смещения» не оказывает заметного влияния на распределение скорости во внутренней части пограничного слоя. Во всех случаях результаты расчета оказываются чрезвычайно близкими к логарифмическому профилю скорости. Положительный градиент давления во внешнем потоке практически не оказывает влияния на профиль скорости во внутренней части слоя.

Таким образом, приведенное сравнение показывает, что результаты, полученные на основе полуэмпирических методов, хорошо согласуются с эмпирическим законом стенки.

На рис. 1. Сравнение экспериментальных профилей скорости (1) с результатами расчетов по формуле (1) при использовании различных аппроксимирующих зависимостей для определения длины «пути смещения» и профиля касательного напряжения. Числа в скобках — значения коэффициентов в формуле (1) для различных значений A . Числа в скобках — значения коэффициентов в формуле (1) для различных значений A . Числа в скобках — значения коэффициентов в формуле (1) для различных значений A .

Рис. 1. Сравнение экспериментальных профилей скорости (1) с результатами расчетов по формуле (1) при использовании различных аппроксимирующих зависимостей для определения длины «пути смещения» и профиля касательного напряжения.

1, 3, 5, 7 — при $A = 0,14 - 0,08(1 - \eta)^2 - 0,06(1 - \eta)^4$; при $\tau/\tau_0 = 1$; $\sqrt{\tau/\tau_0} = 1 - \eta^2$; $-(1 + 0,5A)\eta$; $+ A\eta - (1 + A)$; $= 2,84 \cdot 10^{-2}$; 6 ; $A/R_1 = -0,2$.

нома вто
Значени
вышают р
приводит
по сравне
= δ^*/δ^{**} .

но получи
H с местн
профиля с
4,7 (крива
коэффици
занным X

Отсюда
рых полу
формулы
более то
ны H, оче

В мен
влияет на
деления

На рис. 1, Б приведено сравнение экспериментальных данных для пограничного слоя пластинки [3] с результатами расчета по формуле (2) при использовании различных зависимостей для τ и l . Эти материалы показывают, что точность аппроксимации скорости во внешней части пограничного слоя существенно зависит от правильного выбора функций, определяющих профиль касательного напряжения и длину «пути смещения». Чем лучше указанные функции отражают действительное распределение τ и l , тем с большей точностью результаты расчета приближаются к действительному профилю скорости. При этом наилучшее согласие между теоретическими и экспериментальными характеристиками обнаруживается в том случае, когда используются полином для τ/τ_0 и первая из формул для l/δ , наибольшее различие — при использовании поли-

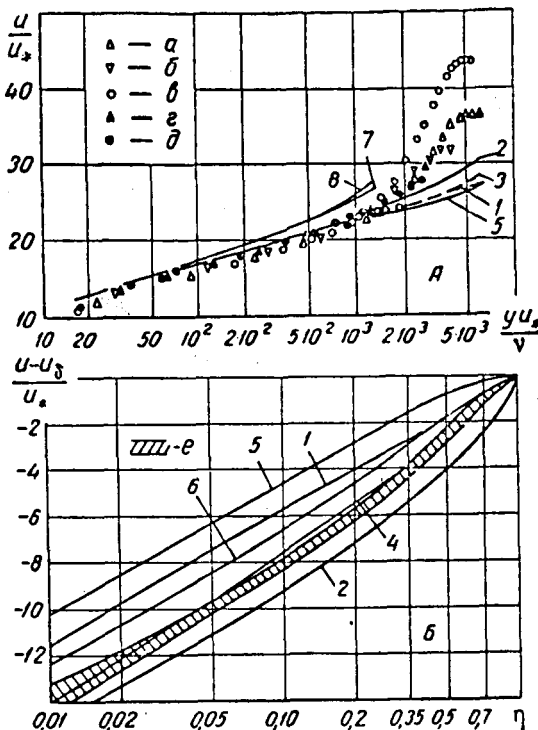


Рис. 1. Сравнение расчетных (А — по формуле (1), Б — (2)) и экспериментальных (А — по данным [3], Б — [4]) профилей скоростей в пограничном слое пластины:

1, 3, 5, 7 — при $l = 0,4 y$; 2, 4, 6, 8 — $l/\delta = 0,14 - 0,08(1 - \eta)^2 - 0,06(1 - \eta)^4$; 1, 2 — при $\tau/\tau_0 = 1$; 3, 4 — $\tau/\tau_0 = 1 - \eta^2$; 5, 6 — $\sqrt{\tau/\tau_0} = 1 - \eta^2$; 7 — $\sqrt{\tau/\tau_0} = 1 + 0,5 A \eta - (1 + 0,5 A) \eta^2$, $A = 20$; 8 — $\tau/\tau_0 = 1 + A \eta - (1 + A) \eta^2$, $A = 20$; $a = A/R_1 = 2,84 \cdot 10^{-2}$; $b = 2,59 \cdot 10^{-2}$; $c = 5,15 \cdot 10^{-2}$; $d = A/R_1 = -0,2 \cdot 10^{-2}$; $e - A = 0$; e — эксперимент

нома второй степени для $\sqrt{\tau/\tau_0}$ и упрощенной формулы для l/δ .

Значения l/δ , найденные по упрощенной формуле, существенно превышают реальные величины во внешней части пограничного слоя. Это приводит к увеличению наполненности расчетных профилей скорости по сравнению с действительными и к уменьшению параметров $H = \delta^*/\delta^{**}$. Путем обработки кривых, изображенных на рис. 1, Б, можно получить формулу $H = (1 - \beta \sqrt{c_f/2})^{-1}$, связывающую параметр H с местным коэффициентом трения c_f . В зависимости от полноты профиля скорости коэффициент β в этой формуле будет меняться от 4,7 (кривая 5) до 6,8 (кривая 4). В последнем случае величина этого коэффициента практически совпадает с эмпирическим значением, указанным Хамма [10].

Отсюда ясно, что причиной неточности параметров H для некоторых полумэмпирических методов является использование упрощенной формулы для определения длины «пути смещения». Если пользоваться более точными формулами для τ/τ_0 и l/δ , можно получить величины H , очень близкие к экспериментальным значениям этого параметра.

В меньшей степени приближенность аппроксимации τ/τ_0 и l/δ влияет на закон сопротивления. Так, если воспользоваться для определения l/δ упрощенной формулой, для $\sqrt{\tau/\tau_0}$ — полиномом второй

степени [2] (соответствующий профиль скорости изображен на рис. 1, б кривой 5), то в широком диапазоне чисел Рейнольдса ($R^{**} = 10^3 \div 10^7$) закон сопротивления для пластинки можно представить в виде степенной зависимости

$$c_{10}/2 = 0,00652 R^{*-0,16}, \quad (3)$$

которая практически совпадает с аналогичной формулой Фолкнера [10], полученной в результате обработки большого числа экспериментальных материалов.

Перейдем к рассмотрению профилей для пограничных слоев с продольным градиентом давления.

В результате обработки большого числа измерений на прямых крыльях Денхофф и Тетервин [7], а затем Шубауэр и Клебанов [8]

получили однопараметрическое семейство универсальных профилей скорости $\bar{u} = \bar{u}(H, y/\delta^{**})$ для пограничных слоев с продольным градиентом давления.

На рис. 2 приводится сравнение теоретических и экспериментальных профилей скорости в пограничном слое с градиентом давления:

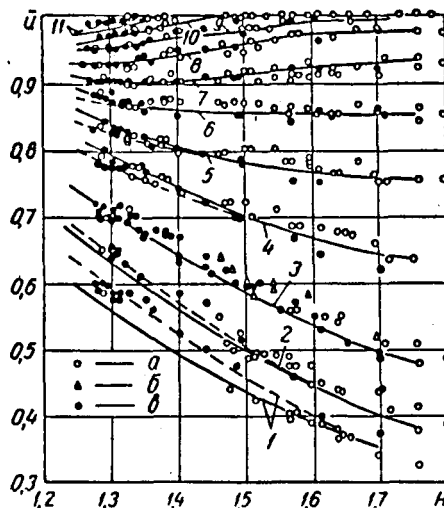


Рис. 2. Сравнение расчетных и экспериментальных профилей скорости в пограничном слое с градиентом давления:

a — результаты Денхоффа и Тетервина при $Re = (0,9 \div 4,18) \cdot 10^3$; б — результаты Бребнера; в — результаты Шубауэра и Клебанова при $Re = 27,7 \cdot 10^3$; сплошные кривые — расчет при $\lg R^{**} = 3,4$; пунктирные — при $\lg R^{**} = 6,2$; 1 — при $y/\delta^{**} = 1/4$; 2 — $1/2$; 3 — 1; 4 — 2; 5 — 3; 6 — 4; 7 — 5; 8 — 6; 9 — 7; 10 — 8; 11 — 9

ных зависимостей $\bar{u} = \bar{u}(H)$ при $y/\delta^{**} = \text{const}$. При расчете скоростей принималось, что τ/τ_0 определяется [2] полиномом второй степени (используются два условия на стенке и одно на внешней границе слоя), а длина «пути смещения» — упрощенной формулой $l = 0,4 y$.

Во всем диапазоне параметров H вплоть до предотрывных состояний пограничного слоя ($H = 1,75 \div 1,8$) результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными. Как видно из сравнения расчетных кривых, изменение числа Рейнольдса мало влияет на зависимости указанного типа. Некоторое систематическое расхождение экспериментальных результатов при разных числах Рейнольдса наблюдается только на небольшом расстоянии от стенки и достаточно хорошо улавливается расчетом. Следует, однако, иметь в виду, что расчетные значения параметра H в рассмотренном случае несколько отличаются от его действительных значений. Поэтому при одних и тех же параметрах H теоретические и экспериментальные профили скорости соответствуют различным значениям формпараметра A . Как было показано, это несоответствие может быть уменьшено путем использования более точных аппроксимаций для профиля касательного напряжения и длины «пути смещения».

В заключение рассмотрим один из возможных способов упрощения полуэмпирического расчета характеристик пограничного слоя при наличии продольного градиента давления. Введем в рассмотрение формпараметр $f = (2 \delta^{**}/c_f)(\bar{u}_s/\bar{u}_0)$, где δ^{**} — толщина потери импульса; c_f — ко-

эффицие
щий реа.
формпар.
образова
го погра
нию с р:

$F(f, R^{**})$

— [2]

$m = -$

Функ
рассчита
тогда К.

Рис. 3. За
характерист
(1 — F ; 1
формпара
основани

1 — при $\lg$
5—5,4; 6

Приним
полином
упроще
на рис
фики ф
отклон
Только
сколько
ной за
циенты
там в
вместо
ровани
соотнс

$R^{**} =$

где ин
начина
перехо
ристи
Ср.
показа
тальн
лучени

4. Инж.

эффицент местного трения в безградиентном потоке, соответствующий реальной толщине δ^{**} . Выражая толщину потери импульса через формпараметр f при помощи вышеприведенной формулы, можно преобразовать интегральное соотношение импульсов для осесимметричного пограничного слоя в случае, когда толщина слоя мала по сравнению с радиусом r_0 поперечной кривизны тела, к следующему виду:

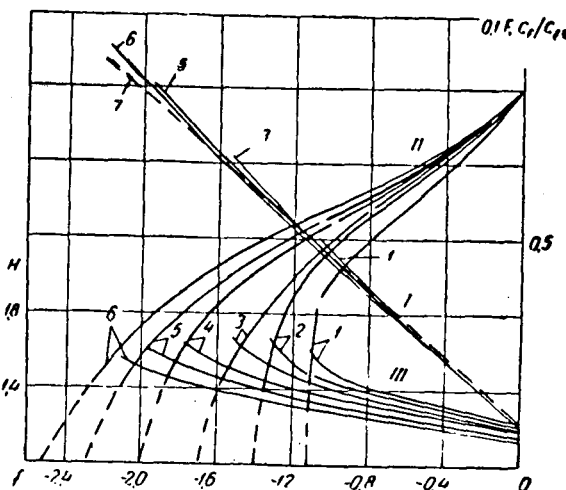
$$\frac{df}{dx} = \frac{u'_s}{u_s} F(f, R^{**}) + \left[\frac{u''_s}{u_s} - (m+1) \frac{r'_0}{r_0} \right] f, \quad (4)$$

$$F(f, R^{**}) = (m+1)c_f/c_{f0} - [2 + (m+1)(1+H)]f, \\ m = -d \lg(c_f/2)/d \lg R^{**}.$$

Функция $F(f, R^{**})$ была рассчитана на основе метода К. К. Федяевского [2].

Рис. 3. Зависимость локальных характеристик пограничного слоя (I — F ; II — c_f/c_{f0} ; III — H) от формпараметра f , рассчитанная на основании метода К. К. Федяевского:

I — при $\lg R^{**} = 3,4$; 2 — 3,8; 3 — 4,2; 4 — 4,6; 5 — 5,4; 6 — 6,2; 7 — при $F = 1,17 - 4,4 f$



Принималось, что профиль касательного напряжения определяется полиномом второй степени для $\sqrt{\tau/\tau_0}$, длина „пути смещения“ — упрощенной формулой $l = 0,4 y$. Результаты расчета представлены на рис. 3. Во всем диапазоне изменения формпараметра f графики функции $F(f, R^{**})$, построенные для разных значений R^{**} , не отклоняются от прямой линии $F = 1,17 - 4,4 f$ более чем на 2—3 %. Только вблизи точек $f = f_s$, соответствующих $c_f = 0$, наблюдается несколько большее расхождение между значениями функции F и линейной зависимостью, достигающее до 5 %. Следует заметить, что коэффициенты в последнем равенстве близки к соответствующим коэффициентам в методе Л. Г. Лойцянского [10]. Подставляя в уравнение (4) вместо функции F ее линейную аппроксимацию и выполняя интегрирование, получим, используя формулу (3), решение интегрального соотношения импульсов в следующем виде:

$$R^{**} = \frac{0,0132}{\frac{-1,88}{r_0} \frac{-2,07}{u_s}} \left[153 \frac{-2,4}{u_{st}} \frac{-2,18}{r_{0t}} R_t^{**1,16} + 1,17 \operatorname{Re} \int_{\frac{x}{r_0}}^{\frac{x}{r_0}} \frac{-3,4}{u_s} \frac{-2,18}{r_0} dx \right]^{0,863}, \quad (5)$$

где индексом t отмечены значения характеристик в точке x_t , от которой начинается расчет турбулентного пограничного слоя (например, в точке перехода). Полагая в (5) $r_0 = 1$, получим формулу для расчета характеристик плоского пограничного слоя.

Сравнение, проведенное для большого числа разнообразных задач, показало (рис. 4), что решение (5) хорошо согласуется с экспериментальными данными и чрезвычайно мало отличается от результатов, полученных на основе исходного метода расчета [2].

Таким образом, приведенные материалы показывают, что выводы, которые следуют из полуэмпирических методов расчета турбулентного пограничного слоя, хорошо согласуются с новейшими эмпирическими зависимостями для профилей скорости, а сами методы могут быть значительно упрощены с вычислительной стороны и сделаны такими же оперативными, как наиболее простые эмпирические методы расчета. Вместе с тем полуэмпирические методы обладают значительно большей гибкостью. Они обобщаются на случай течения газа с большими скоростями [11]

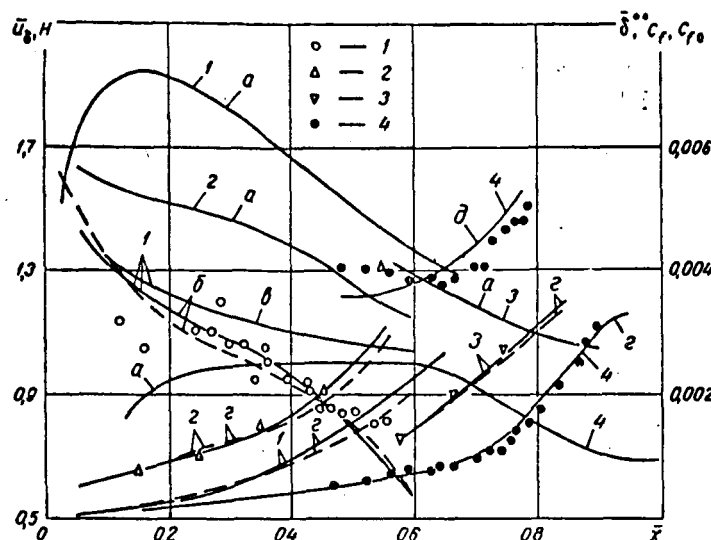


Рис. 4. Сравнение результатов расчета характеристик плоского пограничного слоя с экспериментальными данными разных авторов (а — u_δ ; б — c_f ; в — c_{f0} ; г — δ^{**} ; д — H):

1 — Фоминой и Бучинской ($Re = 5,17 \cdot 10^6$); 2 — Денхоффа и Тетервина ($Re = 2,64 \cdot 10^6$); 3 — Грушвица ($Re = 0,85 \cdot 10^6$); 4 — Шубауэра и Клебанова ($Re = 27,7 \cdot 10^6$); пунктир — расчет по работе [2], сплошные кривые — по формуле (5)

при наличии теплообмена, позволяют учесть влияние поперечной кривизны тела [12], наличие химических реакций и др. Поэтому дальнейшее развитие и усовершенствование этих методов представляет большой интерес.

Обозначения

x, y — координатные оси вдоль поверхности, по перпендикуляру к поверхности; u — проекция скорости на ось x ; r_0 — радиус поперечной кривизны тела; $\bar{u}_\delta = u_\delta/V$; $\bar{x} = x/V$; $\bar{r}_0 = r_0/b$; $Re = Vb/\nu$; V и b — характерные скорость и линейный размер; ν — кинематический коэффициент вязкости; $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ — «динамическая» скорость; τ_0 — касательное напряжение на стенке; $c_f = 2\tau_0/\rho u_\delta^2$ — местный коэффициент трения; ρ — плотность воздуха; δ — толщина пограничного слоя; δ^* — толщина вытеснения; δ^{**} — толщина потери импульса; $H = \delta^*/\delta^{**}$; $R^{**} = u_\delta \delta^{**}/\nu$; $\eta = y/\delta$; $R_1 = u_* \delta/\nu$; $A = (\delta/\tau_0) \frac{dp}{dx}$; l — длина «пути смешения».

Summary

The results obtained by the semi-theoretical calculation method confirm (Fig. 1, A) the existence of the similarity of velocity distributions in the internal portion of the boundary layer with different Reynolds numbers and pressure gradients in the external flow.

If a satisfactory predicted velocity pressure coefficient in this case using Folkner even used. The results of Doerthod made in quadrature (3)

1. Федя
- вып. 282, 193
2. Федя
3. Кла
- II. ИЛ, 1959
4. Rot
- tical sciens
5. Турбу
6. Либ
- монавтика, 2
7. Доер
8. Schu
9. Мон
- 1965.
10. Лой
11. Кут
- Изд. АН СС
12. Гин

[21.X 1965]

If a satisfactory approximation for a shear stress and mixing length is adopted, then the predicted velocity distributions (Fig. 2) in the external portion of the layer at a constant pressure coincide practically with the «velocity defect law». The drag law determined for this case using the semi-theoretical method is confirmed by the experimental relation of Folkner even though rough approximations for the shear stress and «mixing length» are used. The results agree well with the empirical family $\bar{u} = \bar{u}(H, y/\delta^{**})$ obtained in the works of Doenhoff, Tetervin and Schubauer, Klebanoff. Simplification of Fedayvskii's method made in the work reduces the solution of the integral momentum relation to a single quadrature (5).

Литература

1. Федяевский К. К. Турбулентный пограничный слой крыла, I. Труды ЦАГИ, вып. 282, 1936; ч. II. Труды ЦАГИ, вып. 316, 1937.
2. Федяевский К. К., Гиневский А. С. ЖТФ, 27, вып. 2, 309—326, 1957.
3. Клаузер Ф. Турбулентный пограничный слой. Сб. «Проблемы механики», вып. II. ИЛ, 1959.
4. Rotta J. C. Turbulent boundary layer in incompressible flow. «Progress in aeronautical sciences», 2, Pergamon press, Oxford and others, 1962.
5. Турбулентные течения и теплопередача. Под ред. Линь Цзя-Цзяо. ИЛ, 1963.
6. Либби П. А., Баронти П. О., Наполитано Л. Ракетная техника и космонавтика, 2, № 3, 41—49, 1964.
7. Doenhoff A., Tetervin N. NACA, rep. N 772, 1943.
8. Schubauer G., Klebanoff P. S. NACA, rep. N 1030, 1951.
9. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Изд. «Наука», 1965.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1954.
11. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой. Изд. АН СССР, 1962.
12. Гиневский А. С., Солодкин Е. Е. ПММ, 22, № 6, 1958.

[21.X 1965 г.]